Типовые варианты заданий для проведения школьного и муниципального этапов по математике в 2015/2016 учебном году

Типовые задания школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников

Пятый класс

5.1. Найдите решение числового ребуса $a,bb+b,ab=10$, где a и b – различные цифры.

Ответ. 4,55+5,45=10.

5.2. Составьте из восьми различных ненулевых цифр 4 двузначных числа таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.

Ответ. Например, 91 и 64, 73 и 82

5.3. У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

5.4. Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей – 3 мальчика и 2 девочки.

5.5. В ящике 23 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 5 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 12 и 11 кг гвоздей. Кучку с 12 кг откладываем. При втором взвешивании берем 11 кг гвоздей. На одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 6 и 5 кг гвоздей.

Шестой класс

6.1. Расставьте скобки в выражении 7 – 6 – 5 – 4 – 3– 2 – 1 = 0 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. Например, скобки можно расставить так: (7 – 6) – (5 – 4) – (3 – 2 – 1) = 0.

6.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

6.3. Даны три сосуда: первый емкостью 3 л, второй — 5 л, третий — 20 л. Первые два сосуда пустые. Третий заполнен водой. Как с помощью нескольких переливаний налить во второй сосуд ровно 4 л воды? (При переливаниях разрешается наливать в сосуд ровно столько воды, сколько в нем помещается, либо выливать всю воду из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается.)

Ответ. Например, возможны такие последовательности переливаний: $\{0, 0, 20\} \to$ $\to \{0, 5, 15\} \to \{3, 2, 15\} \to \{0, 2, 18\} \to \{2, 0, 18\} \to \{2, 5, 13\} \to \{3, 4, 13\}$ либо $\{0, 0, 20\} \to \{3, 0, 17\} \to \{0, 3, 17\} \to \{3, 3, 14\} \to \{1, 5, 14\} \to \{1, 0, 19\} \to \{0, 1, 19\} \to$ $\to \{3, 1, 16\} \to \{0, 4, 16\}$.

6.4. Из клетчатого квадрата 5×5 вырезали центральный квадратик 1×1. Разрежьте оставшуюся фигуру на 6 равных клетчатых фигур. Приведите какой-нибудь один пример разрезания.

Решение. Два возможных примера приведены на рис. 1. Существуют и другие примеры.

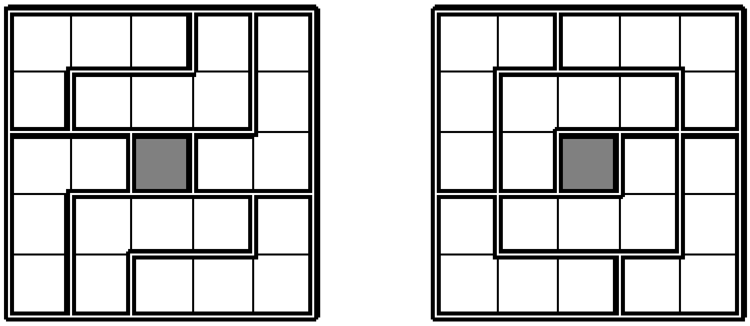


Рис. 1

6.5. У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

Седьмой класс

7.1. В пенале лежит 10 ручек. Известно, что по крайней мере одна из ручек красная. Также известно, что если из пенала взять любые две ручки, то среди них обязательно будет синяя. Сколько красных ручек может быть в пенале? Объясните свой ответ.

Ответ. 1.

Решение. Так как среди любых двух ручек есть синяя, то двух красных ручек в пенале быть не может. А одна красная ручка в пенале есть. Поэтому в пенале лежит 1 красная и 9 синих ручек.

7.2. Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны 20.

Ответ. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10.

7.3. Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рис. 2.

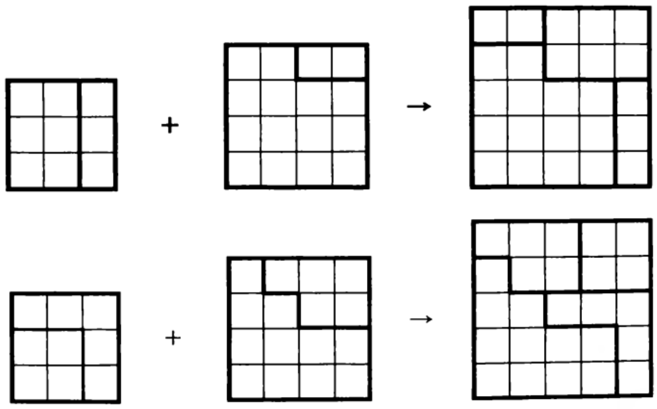


Рис. 2

7.4. Три ученика A, B и C участвовали в беге на 100 м. Когда A прибежал на финиш, B был позади него на 10 м, также, когда B финишировал, C был позади него на 10 м. На сколько метров на финише A опередил C?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость B составляет 0.9 от скорости A, а скорость C составляет 0.9 от скорости B, т.е. 0.81 от скорости A.

7.5. Из произведения всех натуральных чисел от 99 до 3388 включительно вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?

Ответ. 6.

Решение. Заметим сначала, что на последнюю цифру произведения влияют только последние цифры сомножителей. Поэтому наше произведение имеет ту же последнюю цифру, что и произведение $9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Рассмотрим произведение

$9\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8$. Оно оканчивается на 6, т.е. наше произведение оканчивается на ту же цифру, что и произведение $6\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots \cdot 6$. Но из того, что $6\cdot 6$ оканчивается на 6, следует, что наше произведение оканчивается на 6.

Восьмой класс

8.1. Петя считает пальцы на левой руке от большого пальца до мизинца и обратно от мизинца до большого. Каждый следующий счет приходится на другой палец. На какой палец придется число 2015? (Счет: 1 – большой, 2 – указательный, 3 – средний, 4 – безымянный, 5 – мизинец, 6 – безымянный, 7 – средний и т. д.)?

Ответ. Средний.

Решение. На большой палец приходится счет 1, 9, 17, 25, …, 2009 так как 2009 = 8·251+1.

8.2. Докажите, что если $a+2b=3c$ и $b+2c=3a$, то $c+2a=3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: a = b = c, откуда также следует доказываемое равенство.

8.3. Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 60 больше суммы его цифр.

Ответ. Например: 99111..

8.4. Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на восьми кустах равно сумме четырех нечетных чисел, т. е. числу четному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 225 ягод.

8.5. У звезды ACEBD (см. рис. 3) равны углы при вершинах A и B, углы при вершинах E и C, а также равны длины отрезков AC и BE. Докажите, что AD = BD.

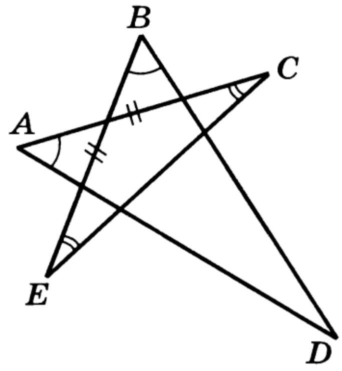


Рис. 3.

Решение. Треугольники ACG и BEF равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (см. рис. 4). Следовательно, $\angle AGC = \angle BFE$ и AG = BF. По теореме о смежных углах $\angle FGD = \angle GFD$. Поэтому треугольник GFD равнобедренный (GD = FD). Следовательно, AG + GD = BF + FD, т. е. AD = BD.

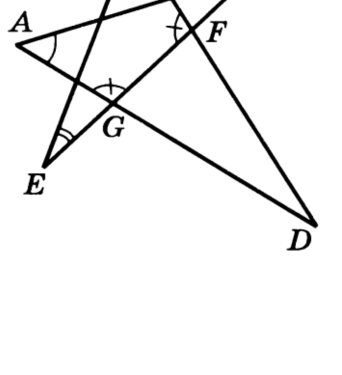


Рис. 4.

Девятый класс

9.1. Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2+b=b^2+a$.

Ответ. $a+b=1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a \neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

9.2. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к $17^{\underline{00}}$ проехал в 1,25 раза больший путь, чем к $16^{\underline{00}}$. Когда поезд выехал?

Ответ. в $12^{\underline{00}}$.

Решение. За 1 час от $16^{\underline{00}}$ до $17^{\underline{00}}$ поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до $16^{\underline{00}}$. Значит, он ехал 4 часа и выехал в $12^{\underline{00}}$.

9.3. Какую наименьшую сумму могут иметь три последовательных натуральных числа, если эта сумма оканчивается на 1234?

Ответ. 21234.

Решение. Пусть n – среднее из данных чисел. Тогда их сумма $S=(n-1)+n+(n+1)=3n$ делится на 3. То есть число $S=\overline{a_1...a_k1234}$ делится на 3. Наименьшим подходящим числом будет 21234.

9.4. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите угол ABC, если AC = 2AB.

Ответ. $\angle$ABC = 90°.

Решение. Пусть точка D – середина стороны *AC* (см. рис. 5). Тогда AD = AC/2 = *AB*. Значит, треугольники *ABE* и ADE равны (сторона *AE* – общая, $\angle$BAE = $\angle$CAE). Тогда $\angle$ABC = $\angle$ADE = 90°, так как ED – медиана равнобедренного треугольника AEC (*AE*=EC − по условию) и, значит, его высота.

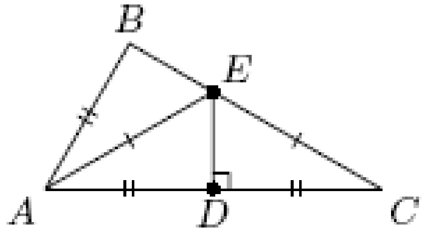


Рис. 5

9.5. Дан график функции $y = x^2 + ax + a$ (см. рис. 6). Найдите a.

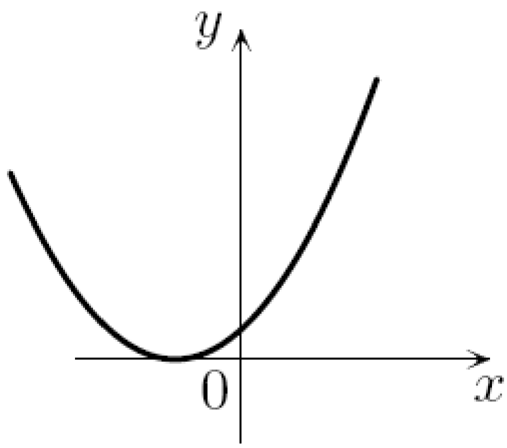


Рис. 6

Ответ. 4.

Решение. График касается оси Ох, поэтому дискриминант трехчлена равен нулю: D= $a^2 - 4a = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$. (Нарисован график трехчлена $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$).

Десятый класс

10.1. Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 100 меньше суммы его цифр.

Ответ. Например: 11…10 (сто единиц).

10.2. Если каждый мальчик купит пирожок, а каждая девочка – булочку, то они потратят вместе на один рубль меньше, чем, если бы каждый мальчик купил булочку, а каждая девочка – пирожок. Известно, что пирожок и булочка стоят целое число рублей, и что мальчиков больше, чем девочек. На сколько человек их больше?

Ответ. На 1.

Решение. Пусть m и n – соответственно количество мальчиков и девочек, а x и y – соответственно цена пирожка и булочки. Тогда, по условию, $mx+ny+1=my+nx$. Отсюда $(x-y)(n-m)=1$. Но произведение натурального числа на целое равно 1, только если оба множителя равны 1.

10.3. Какую наименьшую сумму могут иметь девять последовательных натуральных чисел, если эта сумма оканчивается на 1020304?

Ответ. 81020304.

Решение. Пусть n – среднее из данных чисел. Тогда их сумма $S=(n-4)+(n-3)+(n-2)+\ldots+(n+4)=9n$ делится на 9. То есть число $S=\overline{a_1...a_k1020304}$ делится на 9. Наименьшим подходящим числом будет 81020304.

10.4. Петя составляет «таблицу умножения». Слева от таблицы он написал натуральные числа от 10 до 75 включительно, сверху – от 11 до 48 включительно. После чего записал в таблицу соответствующие произведения пар чисел. Сколько из выписанных произведений являются четными числами?

Ответ. 1881.

Решение. Заметим, что произведение двух чисел будет нечетным, если оба сомножителя нечетны, и четным в остальных случаях. Всего в таблице записано $(75-10+1)\cdot(48-11+1)=2508$ произведений. Заметим, что среди чисел от 10 до 75 будет 33 нечетных числа, а среди чисел от 11 до 48 – 19 нечетных чисел. Поэтому в таблице будет $33\cdot19=627$ нечетных произведений. Остальные $2508-627=1881$ будут четными.

10.5. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF – биссектрисы треугольников ADB и CDB. Докажите, что $EF \parallel AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что $EF \parallel AC$.

Одиннадцатый класс

11.1. Придумайте квадратный трехчлен, который имеет отрицательный коэффициент, но при всех x больше трехчлена $x^2 + 1$.

Ответ. Например, $(x^2 + 1) + (x^2 - x + 1) = 2x^2 - x + 2$.

11.2. По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположенных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x + y) = 170$ и $170(x - y) = 170$. Отсюда находим x = 9 м/с и y = 8 м/с.

11.3. Найдите количество четырехзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвертой на 1.

Ответ. 810.

Решение. Число однозначно определяется первой (от 1 до 9), второй (от 0 до 9) и третьей (от 0 до 8) цифрами. Всего получается $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$ вариантов.

11.4. В треугольной пирамиде SABC провели биссектрисы SM (в грани SAB) и SN (в грани SAC). Оказалось, что MN||BC. Докажите, что у пирамиды есть два ребра одинаковой длины.

Решение. Из того, что MN||BC следует, что BM:AM=CN:AN. По свойству биссектрис BS:AS=BM:AM и CS:AS=CN:AN. Отсюда BS:AS=CS:AS. Значит, BS=CS, что и требовалось.

11.5. На столе белой стороной кверху лежали 100 карточек, у каждой из которых одна сторона белая, а другая черная. Миша перевернул 50 карточек, затем Ваня перевернул 60 карточек, а после этого Петя – 70 карточек. Оказалось, что в результате все 100 карточек лежат черной стороной вверх. Сколько карточек было перевернуто трижды?

Ответ. 40.

Решение. Так как все карточки в итоге оказались перевернуты, то каждую из них переворачивали либо 1 раз, либо 3 раза. Всего было сделано 180 переворачиваний: 100 из них потребовалось, чтобы перевернуть каждую карточку 1 раз; остальные 80 – чтобы какие-то карточки перевернуть еще по 2 раза. Значит, по 3 раза перевернули 40 карточек.

Типовые задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

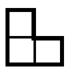
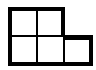
Условия задач

6 класс

6.1. На листке написано слово КОРОБКА. Разрешается взять любые две соседние буквы, поменять их местами и одну из этих двух букв заменить на любую другую. Как за пять таких операций превратить слово КОРОБКА в слово БАРАБАН?

6.2. Петя и Коля соревнуются в беге. В середине дистанции находилась собака, которая в момент их старта побежала им навстречу. Добежав до Пети, она мгновенно развернулась и побежала за Колей, догнав его на самом финише. Известно, что собака бегает в полтора раза быстрее одного из ребят. Кого именно? (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны.)

6.3. Вокруг круглого стола сидят одиннадцать человек – каждый либо Рыцарь, либо Лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а Лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?». Могли ли все одиннадцать ответить «Лжец»?

6.4. На какое наименьшее количество фигурок можно полностью разрезать квадрат 7×7, если фигурки – трёхклеточные уголки  и пятиклеточные фигурки ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

6.5. Десяти мальчикам раздали по две карточки с числами: одному – с числами 1 и 2, другому – 3 и 4, третьему – 5 и 6, …, последнему – 19 и 20. Мальчики встали в произвольном порядке в круг, и их пронумеровали по часовой стрелке. После этого первый и второй поменялись карточками, затем второй и третий, третий и четвертый, …, десятый и первый. При обмене каждый отдавал другому карточку с меньшим из двух чисел, которые у него были. В конце оказалось, что у первого мальчика сумма чисел на карточках равна 12. Какие карточки у него могли быть вначале? Найдите все варианты.

7 класс

7.1. Вася пришел на почту отправить два письма (каждое письмо весит целое число граммов, но Вася не знает их вес). Оказалось, что стоимость отправки письма определяется следующим образом. Отправка письма с весом не более 10 грамм стоит 15 руб. Отправка письма с весом более 10 грамм стоит 15 руб., и дополнительно берется 1 руб. за каждый грамм веса сверх 10. Вася предложил сразу положить два письма на весы и заплатить 30 руб. и добавить по 1 руб. за каждый грамм сверх 20. Верно ли, что при таком способе он всегда заплатит столько же денег, как если бы он оплачивал отправку писем по отдельности?

7.2. Петя нарисовал на плоскости несколько (больше одной) прямых, которые разбили плоскость на несколько частей. Потом он добавил еще одну прямую, и количество частей, на которые разрезана плоскость, увеличилось на 2; потом, после проведения еще одной прямой – ещё на 3, наконец, после проведения еще одной прямой – увеличилось еще на 4. Как Петя мог выполнить такое задание? (Приведите рисунок, занумеровав прямые по порядку их построения).

7.3. Петя и Коля соревнуются в беге. В середине дистанции находилась собака, которая в момент их старта побежала им навстречу. Добежав до Пети, она мгновенно развернулась и побежала за Колей, догнав его на самом финише. Найдите отношение скоростей мальчиков, если известно, что собака бегает в полтора раза быстрее одного из них. (Скорости обоих мальчиков и собаки были постоянны).

7.4. Числа от 1 до $2n$ $(n>1)$ разбили на две группы по n чисел, и числа в группах перемножили. Может ли разность этих произведений равняться числу 555555?

7.5. Вокруг круглого стола сидят 39 человек – каждый либо Рыцарь, либо Лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а Лжец всегда лжет. Каждого из них спросили: «Кто сидит справа от тебя?». Могло ли быть получено 37 ответов «Лжец» и 2 ответа «Рыцарь»?

8 класс

8.1. Точка $A(1;2)$ расположена ниже прямых $y=ax+b$ и $y=cx+d$. А как точка A может быть расположена по отношению к прямой $y=0{,}5(a+c)x+0{,}5(b+d)$ (выше, ниже или на прямой)?

8.2. Петя хочет подобрать различные простые числа a и b так, чтобы для любого простого p значение выражения $ap+b$ было составным числом. Сможет ли он это сделать?

8.3. Докажите, что для любого натурального числа N, оканчивающегося на 12345, можно найти три таких натуральных числа a, b и c, что $N=a+b+c+abc$.

8.4. Окружность с центром O вписана в угол BAC. Касательная к окружности, параллельная AO, пересекает луч AB в точке N. Докажите, что $AN=AO$.

8.5. На столе лежат 10 карточек с числами от 10 до 19 (одна карточка с числом 10, одна – с числом 11, …, одна – с числом 19). Петя и Вася играют в следующую игру. Первым ходит Петя. Они по очереди берут со стола по одной карточке (игроки видят числа на карточках). После того, как они заберут со стола все карточки, каждый из игроков перемножает пять чисел на своих карточках, после чего из большего результата вычитается меньший. Если полученное число оканчивается на 2, 3, 4, 5 или 6, то выигрывает Вася, иначе выигрывает Петя. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию – то есть такую стратегию, которая позволяет ему выиграть, как бы ни играл соперник?

9 класс

9.1. Числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x(x+1)=y(y+1)=z(z+1)$. Докажите, что $(x-y)(y-z)(z-x)=0$.

9.2. В одной из клеток таблицы 6×6 записано число 2014, а в остальных 35 клетках записаны двойки. Разрешается проделать следующую операцию – выбрать любую строку или любой столбец и прибавить к числам, записанным в выбранной строке (или столбце) по единице. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа в таблице равными?

9.3. На левой половине доски написаны 11 натуральных чисел, а на правой – наибольшие общие делители каждой пары чисел левой половины доски. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на левой половине доски, если известно, что любое число, написанное на одной половине доски, встречается и на другой ее половине?

9.4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Отрезки DE и DF являются биссектрисами треугольников ADC и BDC. Оказалось, что $CD=EF$. Докажите, что точка D – середина гипотенузы AB.

9.5. Вася записывает в каждую клетку таблицы 30×30 по одному числу от 1 до 900 так, что каждое число встречается ровно один раз. После этого Петя отмечает три столбца, а затем Вася, увидев столбцы, отмеченные Петей, сам отмечает две строки. В конце вычисляется сумма шести чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Может ли Вася добиться того, чтобы эта сумма равнялась 3000? (Вася сам выбирает, как расставлять числа в таблице.)

10 класс

10.1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 10000. Объясните свой ответ.

10.2. Петя хочет подобрать различные простые числа a, b, c и d так, чтобы для любого простого p значение выражения ap^3+bp^2+cp+d было составным числом. Сможет ли он это сделать?

10.3. Учитель написал на доске три разных положительных числа. Петя записал в свою тетрадь три числа – их попарные суммы, а Коля в свою тетрадь записал три числа, обратных к числам, написанным на доске. Могли ли числа, записанные в тетрадях ребят, совпасть?

10.4. Две окружности равных радиусов пересекаются в точках B и C. На первой окружности выбрана точка A. Луч AB пересекает вторую окружность в точке D ($D\neq B$). На луче DC выбрана точка E так, что $DC=CE$. Докажите, что угол DAE – прямой.

10.5. Вася записывает в каждую клетку таблицы 30×30 по одному числу от 1 до 900 так, что каждое число встречается ровно один раз. После этого Петя отмечает три столбца, а затем Вася, увидев столбцы, отмеченные Петей, отмечает три строки. В конце вычисляется сумма девяти чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Может ли Вася добиться того, чтобы эта сумма делилась на 3000? (Вася сам выбирает, как расставлять числа в таблице.)

11 класс

11.1. Для натурального числа вычисляются суммы любых двух его цифр, стоящих рядом. Найдите наибольшее натуральное число, у которого все эти суммы различны.

11.2. Про квадратный трёхчлен $f(x)$ известно, что $f(0)+f(1)=0$ и $f(2)+f(3)=0$. Найдите сумму корней уравнения $f(x)=0$.

11.3. Докажите неравенство

$$\sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}>2.$$

11.4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах SA, SB, SC и SD выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1 проходят через одну точку. Докажите, что если точка A_1 – середина ребра SA, то точки B_1, C_1 и D_1 – середины ребер SB, SC и SD.

11.5. Пятидесяти мальчикам раздали по две карточки с числами: одному с числами 1 и 2, другому – 3 и 4, еще одному – 5 и 6, …, последнему – 99 и 100. Каждую минуту мальчики разбиваются на 25 пар, и в каждой паре каждый мальчик отдаёт другому карточку с меньшим из двух чисел, которые у него есть. Известно, что при первом обмене у каждого мальчика разность между числами на отданной и полученной карточках была не больше 50. Могло ли случиться так, что через несколько минут по крайней мере у 48 мальчиков окажутся те же карточки, которые у них были вначале?

Решения задач

6 класс

6.1. Будем изменять слово КОРОБКА так: КОРОБКА → АКРОБКА → БАРОБКА → БАРОБАН → БАРБИАН → БАРАБАН.

Замечание. Возможны и другие последовательности операций, например: КОРОБКА → КОРОБАН → КОРББАН → КОБАБАН → КБРАБАН → БАРАБАН или же КОРОБКА → КОУРБКА → КОРАБКА → ОБРАБКА → БАРАБКА → БАРАБАН.

6.2. Ответ. Пети.

Пусть скорость собаки в полтора раза больше скорости Коли. За время забега Коля пробежал ровно одну дистанцию. Если бы собака бегала в полтора раза быстрее его, то она пробежала бы полторы дистанции (она догнала Колю на финише). Это означало бы, что за время забега она добежала до старта и потом пробежала бы до финиша. Но тогда это означало бы, что Петю она встретила на старте, то есть его скорость равнялась бы нулю. Это невозможно.

Значит, скорость собаки в полтора раза больше скорости Пети.

6.3. Ответ. Не могли.

Предположим, что все одиннадцать ответили «Лжец». Лжец мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит Рыцарь. А Рыцарь мог так ответить только в том случае, если справа от него сидит Лжец. Значит, сидящие за столом Лжецы и Рыцари чередуются. Но одиннадцать – нечетное число, поэтому Лжецы и Рыцари не могут чередоваться.

6.4. Ответ. 11 фигурок.

Каждый уголок состоит из трёх клеток квадрата, пятиклеточная фигурка – из пяти клеток, а каждая из 49 клеток окажется в одной из фигурок разрезания. Следовательно общее количество фигурок будет наименьшим, если пятиклеточных фигурок будет наибольшее возможное количество. То есть нам нужно, чтобы трёхклеточных фигурок было наименьшее возможное количество.

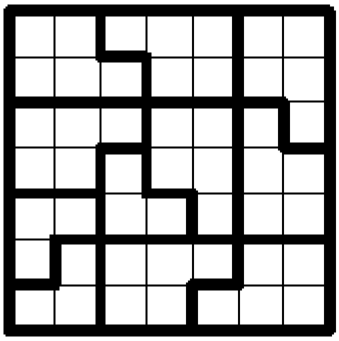


Рис. 1.

Квадрат нельзя разрезать только на пятиклеточные фигурки, так как 49 не делится на 5. Также невозможны случаи, когда при разрезании будет ровно одна трёхклеточная фигурка или будут ровно две трёхклеточных фигурки, так как в первом случае на пятиклеточные фигурки останется $49-3=46$ клеток, а во втором – $49-6=43$ клетки; однако числа 46 и 43 не делятся на 5. Если же будут ровно три трёхклеточных фигурки, то останется $49-9=40$ клеток, их количество делится на 5 ($40=5\cdot 8$). Осталось показать, что требуемое разрезание на 3 трёхклеточных и 8 пятиклеточных фигурок существует (см. рис. 1). Поэтому наименьшее количество фигурок равно $3+8=11$.

6.5. Ответ. 9 и 10 или 1 и 2.

Если карточка с числом 1 находилась вначале у первого мальчика, то после каждого обмена она переходила к следующему, то есть в итоге должна была вернуться к первому мальчику. В конце сумма чисел на его карточках стала равной 12. Значит, на его второй карточке – число 11. Эту карточку ему могли дать при первом обмене, если у его соседа были карточки с числами 11 и 12; при последнем обмене тогда он отдаст карточку 2 и получит 1 взамен.

Рассмотрим случай, когда пара карточек с числами 1 и 2 была у кого-то другого. При первом своем обмене этот мальчик отдал бы карточку с числом 1, а при втором – с числом 2. И далее эта карточка с числом 2 передавалась бы по кругу, дойдя до первого мальчика. Чтобы сумма чисел на его карточках стала равной 12, нужно, чтобы либо после первого обмена к нему пришла карточка с числом 10, либо это число у него оставалось после первого обмена. Первое невозможно, так как при первом обмене передается меньшее, то есть нечетное число. Значит, у него оставалось число 10, и вначале была пара карточек 9 и 10. Отметим, что этот случай также возможен.

7 класс

7.1. Ответ. Неверно.

Предположим, что у Васи два письма. Одно – весом 5 г, а второе – весом 15 г. Тогда по правилам за отправку первого письма он должен заплатить 15 руб., а за отправку второго – $15+5=20$ руб. То есть всего 35 руб. А если положить на весы оба письма, то они вместе будут весить ровно 20 г. И по «Васиным правилам» за их отправку нужно было бы заплатить 30 руб.

7.2. Три возможных примера приведены на рис. 2 (прямые a, b и – в третьем примере – c были нарисованы, прямые 1, 2 и 3 добавлялись Петей).

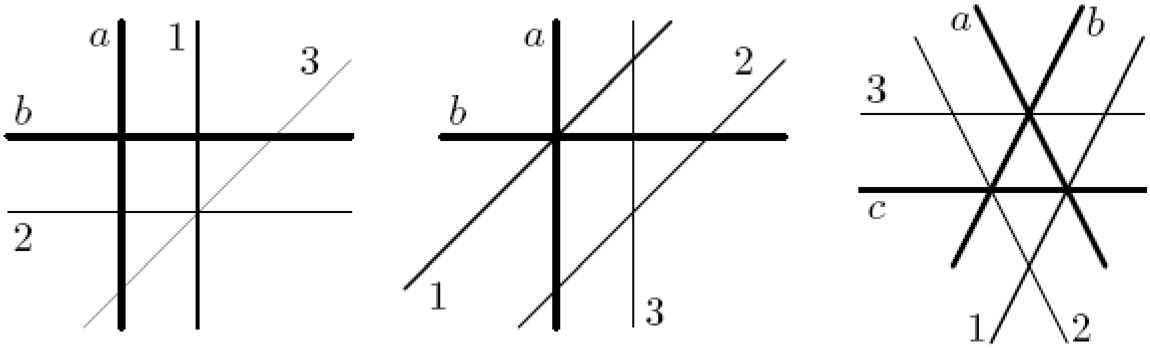


Рис. 2.

Замечание. Существуют и другие способы.

7.3. Ответ. Отношение скорости Пети к скорости Коли равно $11:15$.

Пусть скорость собаки в полтора раза больше скорости Коли. За время забега Коля пробежал ровно одну дистанцию. Если бы собака бегала в полтора раза быстрее его, то она пробежала бы полторы дистанции (она догнала Колю на финише). Это означало бы, что за время забега она добежала до старта и потом пробежала бы до финиша. Но тогда это означало бы, что Петю она встретила на старте, то есть его скорость равнялась бы нулю. Это невозможно.

Значит, скорость собаки в полтора раза больше скорости Пети. Тогда, если обозначить длину дистанции за 10 частей, то встреча Пети и собаки произошла в 3 частях пути от середины дистанции. То есть до финиша Коли собака пробежала $3+3+5=11$ частей пути. Значит, ее скорость в 1,1 раза больше скорости Коли.

Пусть скорость собаки равна x км/час. Тогда скорость Пети равна $x/1{,}5$ км/ч, а скорость Коли – $x/1{,}1$ км/ч. Поэтому отношение скорости Пети к скорости Коли есть $(x/1{,}5):(x/1{,}1)=1{,}1:1{,}5=11:15$.

7.4. Ответ. Не может.

Предположим, что найдется такое n, что числа от 1 до $2n$ можно разбить требуемым образом. Разность произведений может равняться нечетному числу 555555 только если одно произведение – нечетное, а другое – четное. Но произведение натуральных чисел нечетно, только если все сомножители нечетны. А среди чисел от 1 до $2n$ ровно n нечетных чисел. Значит, числа от 1 до $2n$ должны быть разбиты на нечетные числа (1, 3, …, $2n-1$) и четные числа (2, 4, …, $2n$). И при этом $2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)-1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)=555555$. Заметим, что $2n>12$, так как $2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 12=46080<555555$. Но тогда среди четных чисел встретятся числа 6 и 12. Поэтому произведение четных чисел делится на 9. Среди нечетных чисел встретится число 9. Поэтому произведение нечетных чисел также делится на 9. Значит, разность произведений должна делиться на 9. А число 555555 на 9 не делится. Противоречие.

7.5. Ответ. Не могло.

Заметим, что ответ «Лжец» может быть получен, только если справа от Лжеца сидит Рыцарь или справа от Рыцаря сидит Лжец. А ответ «Рыцарь» может быть получен, только если справа от Лжеца сидит Лжец или справа от Рыцаря сидит Рыцарь.

Рассмотрим двух Рыцарей (или двух Лжецов), сидящих рядом, и удалим из-за стола того из них, кто сидит слева (он сказал «Рыцарь»). Удалим аналогичным образом еще одного человека, сказавшего «Рыцарь», из-за стола. Все оставшиеся про своего соседа справа говорят «Лжец». Но тогда за столом сидит 37 человек, и при этом справа от Лжеца сидит

Рыцарь или справа от Рыцаря сидит Лжец. То есть теперь Лжецы и Рыцари за столом чередуются. Но 37 – нечетное число, и такое чередование невозможно.

8 класс

8.1. Ответ. Ниже.

Точка $A(1;2)$ расположена ниже прямой $y = ax + b$ – это означает, что $2 < a \cdot 1 + b$, то есть $2 < a + b$. Аналогично $2 < c + d$. Сложив эти неравенства одного знака, мы получаем: $4 < (a + c) + (b + d)$, то есть $2 < 0{,}5(a + c) \cdot 1 + 0{,}5(b + d)$. Это и означает то, что точка A расположена ниже прямой $y = 0{,}5(a + c)x + 0{,}5(b + d)$.

8.2. Ответ. Сможет.

Например, Петя может задать $a = 5$ и $b = 11$. Рассмотрим выражение $f(p) = 5p + 11$. Тогда, если подставить вместо p любое нечетное простое число, то значение выражения будет четным числом (как сумма двух нечетных чисел), большим 2, то есть составным. Также заметим, что $f(2) = 5 \cdot 2 + 11 = 21$ – составное. То есть выражение $f(p)$ при любом простом p принимает значение, являющееся составным числом.

Замечание. Существуют и другие примеры.

8.3. Положим $c = 1$. Тогда $a + b + c + abc = a + b + 1 + ab = (a + 1)(b + 1)$. Если число N оканчивается на 12345, то оно делится на 5, то есть $N = 5 \cdot m$. Если теперь взять $a = 4$ и $b = m - 1$, то получим $(a + 1)(b + 1) = 5m = N$, что и требовалось.

8.4. Касательная, упомянутая в условии, является второй стороной угла ANK, в который вписана данная окружность. Поэтому прямая NO является биссектрисой угла ANK, откуда $\angle ANO = \angle KNO$. Из параллельности прямых AO и NK вытекает, что $\angle KNO = \angle NOA$. Значит, в треугольнике ANO углы при стороне NO равны, откуда и следует утверждение задачи.

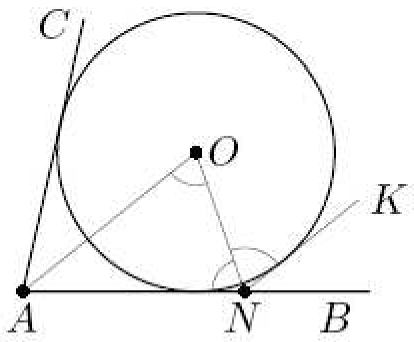


Рис. 3.

8.5. Ответ. Петя.

Покажем, что Петя может добиться того, что каждое из двух произведений чисел будет делиться на 10. А значит, разность этих произведений будет оканчиваться на 0, и Петя выиграет.

Заметим, что в игре будет сделано 10 ходов, и последнюю (десятую) карточку со стола заберет Вася. Это означает, что Петя может «заставить» Васю взять определенную карточку. Для этого Петя просто должен не брать её своими ходами. У него всегда есть возможность взять другую карточку.

Пусть первым ходом Петя возьмет карточку с числом 10. Запретим Пете брать карточку с числом 15. Тогда эту карточку обязательно возьмет Вася. Пусть вторым своим ходом Петя возьмет карточку с любым нечётным числом (кроме 15). Заметим, что среди чисел от 10 до 19 ровно 5 чётных и ровно 5 нечётных. Так как Петя возьмет одну карточку с нечётным числом, то Вася возьмет хотя бы одну карточку с чётным. Таким образом, в конце игры произведение чисел на карточках Пети делится на 10, так как он взял карточку с числом 10. С другой стороны, произведение чисел на карточках Васи также делится на 10, поскольку он взял карточку с числом 15 и карточку с чётным числом. Значит, разность этих произведений будет оканчиваться на 0.

Замечание. Петя может добиться того, что каждое из двух произведений чисел будет делиться на 10, и по-другому. Первым своим ходом он должен взять карточку с числом 15, вторым ходом – с чётным числом, отличным от 10; при этом он может «заставить» Васю взять карточку с числом 10.

9 класс

9.1. Первое решение. Из первого равенства получаем, что $x^2 + x - y^2 - y = 0$, то есть $(x-y)(x+y+1) = 0$. Аналогично, $(x-z)(x+z+1) = 0$. Если хотя бы одна из скобок $(x-y)$ или $(z-x)$ обращается в ноль, то и произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ равно нулю. В противном случае получаем $x+y+1=0$ и $x+z+1=0$, откуда $y=z$, и тогда произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ вновь обращается в ноль.

Второе решение. Пусть $x(x+1) = y(y+1) = z(z+1) = c$. Тогда числа x, y, z являются корнями квадратного уравнения $t(t+1) = c$, которое имеет не более двух различных корней. Следовательно, среди чисел x, y, z есть по крайней мере два совпадающих, откуда вытекает требуемое равенство.

9.2. Ответ. Нельзя.

Первое решение. Заметим, что при указанных операциях сумма чисел в таблице увеличивается на 6. Изначально эта сумма равнялась $2014+35\cdot 2 = 2084$. Если бы все числа удалось сделать равными k за t операций, то сумма чисел в таблице равнялась бы $36k$. При этом $2084+6t = 36k$, откуда $2084 = 36k-6t = 6(6k-t)$. Но число 2084 на 6 не делится, поэтому все числа в таблице нельзя сделать равными.

Второе решение. Рассмотрим шахматную раскраску нашей таблицы. Заметим, что за каждую операцию к числам, записанным в чёрных клетках, суммарно прибавляется 3. К числам, записанным в белых клетках, также суммарно прибавляется 3. Таким образом, разность между суммой чисел в чёрных клетках и суммой чисел в белых клетках не меняется. В самом начале модуль этой разности равнялся $2014-2 = 2012$. Если бы все числа стали равными, то эта разность стала бы нулём. Поэтому сделать все числа равными не удастся.

Замечание. Решение, аналогичное второму решению, также можно получить, рассмотрев на доске квадратик 2×2, в одной из клеток которого записано число 2014.

9.3. Ответ. 10.

Заметим вначале, что для любых натуральных чисел $A \geq B$ выполняется неравенство $(A, B) \leq A$, причем равенство выполняется только в случае, когда $A = B$. Пусть $A \geq B$ – два самых больших числа на левой половине доски. Тогда на правой половине число A может появиться только в одном случае, когда $A = B$; НОД всех других пар чисел будет меньше A. Значит, на левой половине доски не больше 10 различных чисел. Записав на левую половину доски числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 1024, на правой мы получим точно такие же числа.

9.4. В силу того, что DE и DF являются биссектрисами смежных углов ADC и BDC, следует, что угол EDF – прямой. Тогда точки C и D лежат на окружности с диаметром EF. Из равенства $CD = EF$ следует, что и хорда CD является диаметром этой окружности. Но тогда углы DFC и DEC – прямые. Это означает, что биссектрисы DF и DE треугольников BDC и ADC являются их высотами. Поэтому эти треугольники равнобедренные: $BD = DC$ и $CD = DA$. Отсюда следует утверждение задачи.

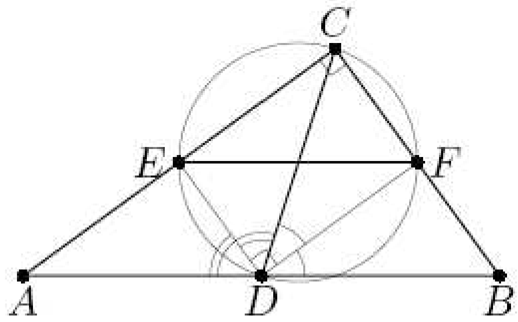


Рис. 4.

9.5. Ответ. Может.

Пусть Вася запишет в первую строку слева направо числа 100, 101, 102, …, 129 а во вторую – слева направо числа 900, 899, 898, …, 871. Остальные клетки таблицы Вася может заполнить произвольно. Тогда пары чисел, стоящих в одном столбце в первых двух строках, имеют одинаковую сумму: $100+900=101+899=102+898=\ldots=129+871=1000$. Теперь, какие бы три столбца ни выбрал бы Петя, Вася должен выбрать две первые строки. Тогда сумма шести чисел, стоящих на их пересечении, будет равна $1000\cdot 3=3000$.

10 класс

10.1. Ответ. 255558.

Заметим, что в наименьшем натуральном числе с произведением цифр 10000 не будет цифры 1. Действительно, если ее убрать, то произведение цифр не изменится, а число уменьшится. Теперь заметим, что $10000 = 2^4 \cdot 5^4$. Отсюда следует, что в искомом числе обязательно будет ровно четыре цифры 5. А произведение остальных цифр равно $2^4 = 16$. То есть в числе будет еще по крайней мере две цифры. Чтобы число было наименьшим, нужно чтобы цифр было ровно две. Эти цифры могут быть 2 и 8 или 4 и 4. Если нам дан набор цифр, то наименьшее число получится, если мы упорядочим цифры по возрастанию (в старшем разряде должна стоять самая маленькая цифра). Поэтому осталось выбрать наименьшее из чисел 255558 и 445555. Это число 255558.

10.2. Ответ. Сможет.

Например, Петя может задать $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$ и $d = 11$. Рассмотрим выражение $f(p) = 3p^3 + 5p^2 + 7p + 11$. Тогда, если подставить вместо p любое нечетное простое число, то значение выражения будет чётным числом (как сумма четырёх нечётных чисел), большим 2, то есть составным. Также заметим, что $f(2) = 3 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 11 = 69$ – составное. То есть $f(p)$ при любом простом p принимает составное значение.

Замечание. Существуют и другие примеры.

10.3. Ответ. Не могли.

Пусть на доске написаны числа a, b, c, для которых выполняются неравенства $0 < a < b < c$. Тогда для Петиных чисел выполнены неравенства $a + b < a + c < b + c$, а для Колиных – неравенства $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Предположим, что числа в тетрадях могли совпасть. Тогда меньшее число равно меньшему, среднее – среднему, большее – большему, то есть $a + b = \frac{1}{c}, a + c = \frac{1}{b}, b + c = \frac{1}{a}$. Из первых двух равенств получаем $ac + bc = 1$ и $ab + bc = 1$. Вычтем из первого полученного равенства второе. Получим $ac = ab$. Отсюда $c = b$ – противоречие.

10.4. Соединим точки A и C. Общая хорда BC двух равных окружностей стягивает равные дуги этих окружностей, поэтому опирающиеся на эти дуги вписанные углы BAC и BDC равны. Но тогда треугольник ACD – равнобедренный, откуда $AC = CD = CE$

(последнее – в силу условия задачи). Итак, точка C является центром окружности, описанной около треугольника DAE. Отрезок DE является диаметром этой окружности, откуда следует утверждение задачи.

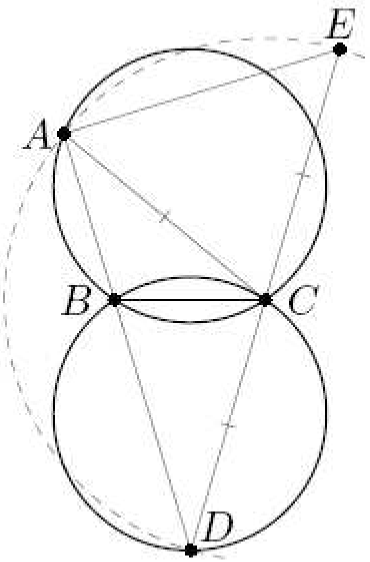


Рис. 5.

10.5. Ответ. Может.

Пусть Вася запишет в первую строку слева направо числа 1, 2, 3, …, 30, во вторую – слева направо числа 99, 100, 101, …, 128, а в третью – слева направо числа 900, 898, 896, …, 842; остальные клетки таблицы Вася может заполнить произвольно. Тогда тройки чисел, стоящих в одном столбце в первых трех строках, имеют одинаковую сумму: $1+99+900=2+100+898=3+101+896=\ldots=30+128+842=1000$. Теперь, какие бы три столбца ни выбрал бы Петя, Вася должен выбрать три первые строки. Тогда сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении будет равна $1000\cdot 3=3000$.

11 класс

11.1. Ответ. $A=99887766554433221100$.

Покажем, что число A, указанное в ответе – искомое. Наибольшее возможное значение суммы пары цифр равно 18, поэтому всего можно получить не более 19 пар сумм: от 0 до 18. Значит, искомое число X не более, чем 20-значное. Рассмотрим теперь только 20-

значные числа. Если какая-то из первой пары цифр числа X будет меньше 9, то и число будет меньше, чем A. Значит, X начинается с двух девяток. Третья цифра – не 9, а если она меньше 8, то X будет меньше A. Значит, третья цифра числа X равна 8. Аналогично получаем следующие цифры.

11.2. Ответ. 3.

Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда данные равенства перепишутся в виде $c+a+b+c=0$ и $4a+2b+c+9a+3b+c=0$, то есть получаем систему уравнений $a+b+2c=0$, $13a+5b+2c=0$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $12a+4b=0$, откуда $-\frac{b}{a}=3$. Тогда, согласно теореме Виета, сумма корней уравнения $f(x)=0$ равна 3.

11.3. Пусть $A=\sqrt[2014]{\frac{1007}{1006}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}$. Тогда

$$A=\sqrt[2014]{\frac{2014}{2012}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}>\sqrt[2014]{\frac{2014}{2013}}+\sqrt[2014]{\frac{2013}{2014}}=x+\frac{1}{x},$$

где $x=\sqrt[2014]{\frac{2014}{2013}}>0$. Для положительных чисел a и b выполняется неравенство о средних: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. Следовательно, $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$. Отсюда следует, что $A>2$.

11.4. Первое решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$. Пусть указанные в условии отрезки пересекаются в точке P. Отрезки AC_1 и CA_1 лежат в одной плоскости ASC, значит, точка P их пересечения принадлежит этой плоскости. Аналогично, являясь точкой пересечения отрезков BD_1 и DB_1, лежащих в плоскости BSD, точка P лежит в этой плоскости. Значит, точка P лежит на линии пересечения плоскостей ASC и BSD, то есть на отрезке SO.

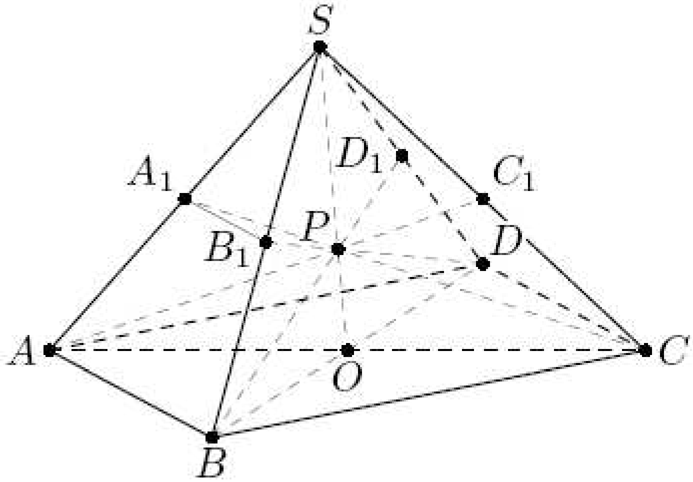


Рис. 6.

Отрезок SO является медианой треугольника ASC, поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам. Значит, точка P является точкой пересечения медиан CA_1 и SO треугольника ASC. Поэтому отрезок AC_1, проходящий через эту точку, является медианой треугольника ASC, то есть точка C_1 – середина ребра SC. Отсюда следует, что $SP:PO = 2:1$. Но тогда отрезки BD_1 и DB_1 являются медианами треугольника BSD, откуда B_1 и D_1 – середины ребер SB и SD. Утверждение доказано.

Второе решение. Проведем плоскость α через точки C, D и A_1. Прямая AB параллельна прямой CD, лежащей в α, поэтому $AB \parallel \alpha$. Значит, α пересекает плоскость SAB по прямой ℓ, параллельной AB. Поскольку ℓ проходит через середину A_1 стороны SA, она является средней линией треугольника SAB и проходит также через середину ребра SB. Итак, α пересекает ребро SB в его середине.

С другой стороны, общая точка P четырёх отрезков из условия лежит в α, как и точка D. Значит, и точка B_1, лежащая на прямой DP, лежит в α. Таким образом, α пересекает ребро SB в точке B_1, то есть эта точка – середина SB.

Рассуждая аналогично, последовательно получаем, что точки C_1 и D_1 являются соответственно серединами рёбер SC и SD.

11.5. Ответ. Не могло.

Первое решение. Покажем, как указать трех мальчиков, у которых *никогда* не окажутся их начальные карточки. Первым будет мальчик A, у которого вначале были карточки 1 и 2. Действительно, после первого обмена карточка с числом 1 окажется у кого-то другого. Пусть в некоторый момент у A впервые окажутся вновь обе карточки 1 и 2. Это могло произойти только если при указанном обмене к нему пришла одна из этих карточек, а другая уже у него была. Но тогда при этом же обмене от него должна была уйти вторая из этой пары карточек, так как 1 и 2 – наименьшие числа в данном наборе.

Вторым будет мальчик B, у которого вначале были карточки 99 и 100. У него при первом обмене должна была остаться карточка с числом 100 – самым большим из всех чисел на карточках, и эта карточка не передавалась. В то же время, переданное другому мальчику число 99 не может вернуться к B в силу того, что теперь оно не является меньшим у того, к кому она попала.

Третьим будет мальчик C, к которому при первом обмене попала карточка с числом 99. Действительно, она уже никогда не будет меньшей в паре его карточек (карточка 100 – у мальчика B), и потому он ее никому уже передавать не будет.

Осталось заметить, что мальчики A и C – разные, так как в самом начале мальчики с карточками с числами 1 и 2 и с числами 99 и 100 не обменивались, иначе при первом обмене у них разность между числами на отданной и полученной карточке была равна 98, что больше 50.

Второе решение. Покажем, что исходные карточки не могут оказаться даже у 26 мальчиков.

Предположим, что по крайней мере 26 мальчиков после очередного обмена получили исходные карточки. Назовем таких мальчиков *удачливыми*. При последнем обмене мальчики разбивались на 25 пар. Тогда по принципу Дирихле найдутся два удачливых мальчика A и B, которые находились в одной паре.

Пусть после обмена у A оказались карточки с числами k и $k+1$, а у B – карточки с числами m и $m+1$, где $k > m+1$. Но тогда при последнем обмене B отдал A карточку с числом, не меньшим k. При этом у него оставалась карточка с числом, не большим $m+1$. Значит, он отдал A карточку с большим, а не меньшим числом. Противоречие.

Замечание. Во втором решении не используется тот факт, что при первом обмене у каждого мальчика разность между числами на отданной и полученной карточках была не больше 50. Следовательно, утверждение задачи верно и без этого условия.